

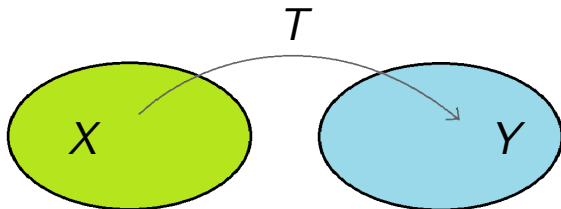
Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 7

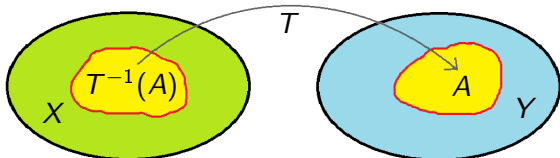
Funkcje mierzalne i obraz miary



Def. Niech (X, \mathcal{F}_X) i (Y, \mathcal{F}_Y) przestrzenie mierzalne. Odwzorowanie $T : X \rightarrow Y$ jest **mierzalne** (lub \mathcal{F}_X - \mathcal{F}_Y -mierzalne) jeżeli

$$\forall A \in \mathcal{F}_Y \quad T^{-1}(A) \in \mathcal{F}_X$$

(czyli, gdy przeciwobraz zbioru mierzalnego jest zbiorem mierzalnym).



Lem. Jeśli $\mathcal{F}_Y = \sigma(\mathcal{G})$ jest generowana przez rodzinę $\mathcal{G} \subseteq 2^Y$, to

$$T : X \rightarrow Y \text{ mierzalne} \iff \forall A \in \mathcal{G} \quad T^{-1}(A) \in \mathcal{F}_X$$

Dowód: „ \implies ” jasne. „ \impliedby ”. Rodzina $\mathcal{F}_{ok} := \{A \subseteq Y : T^{-1}(A) \in \mathcal{F}_X\}$ jest σ -algebrą (przeciwobraz zachowuje sumy, przekroje i dopełnienia). Z założenia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_{ok}$. Stąd $\mathcal{F}_Y = \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}_{ok}$. Czyli T mierzalne. ■

Wn. Odwzorowania ciągłe są mierzalne (względem zbiorów borelowskich).

Dowód: Niech (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) przestrzenie topologiczne i niech $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O}_X)$ oraz $\mathcal{B}(Y) := \sigma(\mathcal{O}_Y)$ σ -algebry zbiorów borelowskich.

$$\begin{aligned} T : X \rightarrow Y \text{ odwzorowanie ciągłe} &\stackrel{\text{Def}}{\iff} \forall U \in \mathcal{O}_Y \quad T^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X \\ &\stackrel{\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{B}(X)}{\implies} \forall U \in \mathcal{O}_Y \quad T^{-1}(U) \in \mathcal{B}(X) \\ &\stackrel{\text{Lem}}{\implies} \forall U \in \mathcal{B}(Y) \quad T^{-1}(U) \in \mathcal{B}(X) \\ &\stackrel{\text{Def}}{\iff} T : X \rightarrow Y \text{ mierzalne} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Uw. Funkcji mierzalnych jest dużo więcej niż ciągłych (bo zbiorów borelowskich jest dużo więcej, niż otwartych).

Prz. Funkcja charakterystyczna $\mathbb{1}_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ zbioru $A \subseteq X$ jest dana wzorem

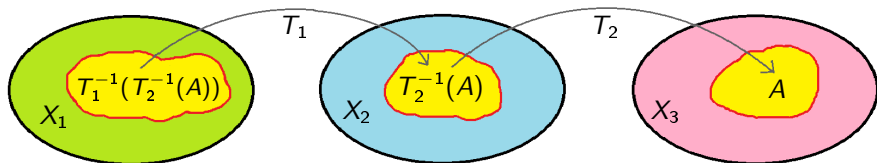
$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Jeśli X przestrzeń mierzalna, to $\mathbb{1}_A$ mierzalna $\iff A$ mierzalny.

Jeśli X przestrzeń topologiczna, to $\mathbb{1}_A$ ciągła $\iff A$ otwarto-domknięty.

Stw. Złożenie funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną.

Dowód: Niech (X_i, \mathcal{F}_i) , $i = 1, 2, 3$, przestrzenie mierzalne i niech $T_1 : X_1 \rightarrow X_2$ oraz $T_2 : X_2 \rightarrow X_3$ odwzorowania mierzalne. Wtedy



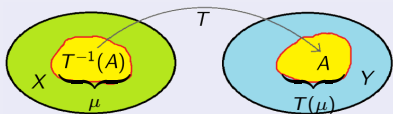
$T_2 \circ T_1 : X_1 \rightarrow X_3$ oraz dla każdego $A \in \mathcal{F}_3$ mamy

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(A) = T_1^{-1}(\underbrace{T_2^{-1}(A)}_{\in \mathcal{F}_2}) \in \mathcal{F}_1 \quad \blacksquare$$

Stw. Niech $T : X \rightarrow Y$ odwzorowanie mierzalne między przestrzeniami mierzalnymi (X, \mathcal{F}_X) , (Y, \mathcal{F}_Y) . Dla każdej miary μ na (X, \mathcal{F}_X) wzór

$$\forall A \in \mathcal{F}_Y \quad T(\mu)(A) := \mu(T^{-1}(A))$$

definiuje miarę na (Y, \mathcal{F}_Y) .



Dowód: $T(\mu)(\emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Jeśli $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}_Y$ parami rozłączne, to

$$T(\mu)\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \stackrel{\text{def}}{=} \mu\left(T^{-1}\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) \begin{array}{l} \text{przeciwobraz zachowuje} \\ \text{sumy i rozłączność} \end{array} \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(A_n)\right)$$

$$\stackrel{\text{miary } \mu}{\text{\(\sigma\)-addytywność}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-1}(A_n)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} T(\mu)(A_n). \quad \blacksquare$$

Def. Miarę $T(\mu)$ nazywamy **obrazem miary** μ przy odwzorowaniu T .

Prz. Niech (Ω, \mathcal{F}, P) przestrzeń probabilistyczna.

Zmienna losowa \equiv funkcja mierzalna $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tzn.

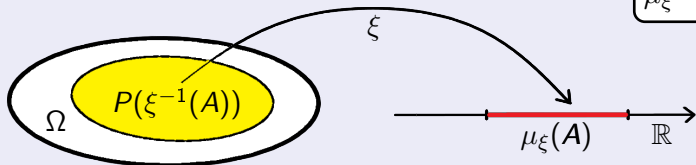
$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}$$

Rozkład zmiennej losowej $\xi \equiv$ obraz miary P przy ξ

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \mu_{\xi}(A) := P(\xi \in A) = P(\xi^{-1}(A))$$



$$\mu_{\xi} = \xi(P)$$



Def. Niech (X, \mathcal{F}, μ) przestrzeń z miarą. Mówimy, że odwzorowanie mierzalne $T : X \rightarrow X$ zachowuje miarę μ lub też że miara μ jest niezmiennicza ze względu na T jeżeli $T(\mu) = \mu$, czyli

$$\forall_{A \in \mathcal{F}} \quad \mu(A) = \mu(T^{-1}(A)).$$

Prz. Miara Lebesgue'a jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia

$$\forall_{y \in \mathbb{R}^n} \quad \forall_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \quad \lambda^n(y + A) = \lambda^n(A).$$

($T(x) := x + y$ jest odwzorowaniem mierzalnym $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $T(\lambda^n) = \lambda^n$)

Def. Niech $O(n)$ oznacza zbiór macierzy ortogonalnych $n \times n$:

$$T \in O(n) \iff T^t \cdot T = I$$

Uw. Macierze $n \times n$ możemy traktować jako odwzorowania liniowe $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

- 1 $T \in O(n)$
- 2 T zachowuje iloczyn skalarny $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
- 3 T zachowuje normę $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.



Tw. $T \in O(n) \implies T(\lambda^n) = \lambda^n$ (miara Lebesgue'a jest niezmiennicza ze względu na liniowe izometrie)

Dowód: Izometria T jest ciągła, więc mierzalna. Dla dowolnych $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\begin{aligned} T(\lambda^n)(y + A) &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda^n(T^{-1}(y + A)) \stackrel{\text{liniowość } T^{-1}}{=} \lambda^n(T^{-1}(y) + T^{-1}(A)) \\ &\stackrel{\text{niezmienniczość } \lambda^n \text{ na przesunięcia}}{=} \lambda^n(T^{-1}(A)) \stackrel{\text{def}}{=} T(\lambda^n)(A). \end{aligned}$$

Czyli $T(\lambda^n)$ niezmiennicza na przesunięcia. Ponadto zauważmy, że

$$\begin{aligned} K(0, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|Tx\| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : Tx \in K(0, r)\} = T^{-1}(K(0, r)) \end{aligned}$$

Stąd $T(\lambda^n)(K(0, r)) = \lambda^n(T^{-1}(K(0, r))) = \lambda^n(K(0, r)) < \infty$.

Zatem na mocy **Wn3** z wykładu 3, dla pewnego $c \geq 0$ mamy

$$T(\lambda^n) = c\lambda^n.$$

Ale skoro $T(\lambda^n)(K(0, r)) = \lambda^n(K(0, r))$, to $c = 1$.



Def. Niech $GL(n)$ oznacza zbiór odwracalnych macierzy $n \times n$:

$$S \in GL(n) \iff \det(S) \neq 0 \iff S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ odwracalne}$$

Uw. $O(n) \subsetneq GL(n)$. Mianowicie, $T \in O(n) \implies \det(T) = \pm 1$.

Tw. (Obraz miary Lebesgue'a przy odwzorowaniu liniowym)

$$S \in GL(n) \implies S(\lambda^n) = |\det(S^{-1})|\lambda^n = |\det(S)|^{-1}\lambda^n$$

Dowód: (Krok 1) Załóżmy, że $S = D$ diagonalna

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$$

Odwzorowanie $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Dx = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$ jest ciągłe, a więc mierzalne. Ponadto

$$\det(D) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \quad \text{oraz} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Czyli $D^{-1}\mathbf{x} = (\lambda_1^{-1}x_1, \dots, \lambda_n^{-1}x_n)$ oraz $\det(D^{-1}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{-1}$. Stąd

$$\begin{aligned} D(\lambda^n)([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) &= \lambda^n \left(D^{-1}([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) \right) \\ &= \lambda^n ([\lambda_1^{-1}a_1, \lambda_1^{-1}b_1] \times \dots \times [\lambda_n^{-1}a_n, \lambda_n^{-1}b_n]) \\ &= \prod_{i=1}^n |\lambda_i^{-1}b_i - \lambda_i^{-1}a_i| = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{-1} \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \\ &= \det(D^{-1}) \cdot \lambda^n ([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]). \end{aligned}$$

Zatem $D(\lambda^n) = \det(D^{-1})\lambda^n$ z jednoznaczności miary.

(Krok 2). Wykorzystamy znany fakt z algebry, że każdą odwracalną macierz $S \in GL(n)$ można zapisać w postaci

$$S = T_1 D T_2, \quad \text{gdzie } T_1, T_2 \in O(n) \text{ oraz } D \text{ diagonalna}$$

z wartościami własnymi $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. Stąd dla $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$\begin{aligned} S(\lambda^n)(A) &= \lambda^n((T_1 D T_2)^{-1}(A)) = \lambda^n(T_2^{-1} D^{-1} T_1^{-1}(A)) \\ &\stackrel{T_2 \in O(n)}{=} \lambda^n(D^{-1} T_1^{-1}(A)) \stackrel{\text{Krok 1}}{=} \det(D^{-1}) \lambda^n(T_1^{-1}(A)) \\ &\stackrel{T_1 \in O(n)}{=} \det(D^{-1}) \lambda^n(A). \end{aligned}$$

Czyli $S(\lambda^n) = \det(D^{-1})\lambda^n$.

Ponadto zauważmy, że $T \in O(n) \implies \det(T) \in \{-1, 1\}$, gdyż

$$\begin{aligned}\det(T)^2 &= \det(T)\det(T) = \det(T^t)\det(T) = \det(T^t T) = \det(I) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}|\det(S)| &= |\det(T_1 D T_2)| = |\det(T_1)\det(D)\det(T_2)| = |\det(D)| \\ &= \det(D).\end{aligned}$$

Czyli $\det(D^{-1}) = \det(D)^{-1} = |\det(S)|^{-1}$ i stąd

$$S(\lambda^n) = |\det(S)|^{-1}\lambda^n. \quad \blacksquare$$

Wn. (Objętość n -wymiarowego równoległoboku)

Jeśli v_1, \dots, v_n są liniowo-niezależnymi wektorami w \mathbb{R}^n , to objętość równoległoboku przez nie rozpiętego jest dana przez moduł wyznacznika macierzy utworzonej przez te wektory.

